Énergie potentielle - Énergie mécanique - Problèmes à un degré de liberté

Dans le chapitre précédent nous avons établi, à partir de la 2e loi de Newton, le théorème de l'énergie cinétique et défini l'énergie cinétique, le travail et la puissance d'une force.

Table des matières

1 Travail d'une force - Exemples

1.1 Force de pesanteur

$$\delta W = \mathbf{F}.d\mathbf{OM} = -mg\,dz$$

$$W_{12} = -mg(z_2 - z_1) = mgz_1 - mgz_2 = E_{p_1} - E_{p_2}$$

avec :

$$\boxed{E_p(z) = mgz + cte}$$

Attention à l'orientation des axes !

1.2 Force de rappel élastique

$$\delta W = \mathbf{F}.d\mathbf{OM} = -kx\,dx$$

$$W_{12} = -k(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2}) = E_{p_1} - E_{p_2}$$

avec :

$$\boxed{E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 + cte}$$

1.3 Force de frottement

$$\delta W = \mathbf{F}.d\mathbf{OM} = -kv_x\,dx$$

W_{12} ne peut pas se mettre sous la forme $E_{p_1} - E_{p_2}$.

1.4 Exercice

Soit dans le plan Oxy un point matériel soumis à la force :

$$\mathbf{F} = (y^2 - x^2)\mathbf{e}_x + 4xy\mathbf{e}_y$$

Calculer le travail de $O(0,0)$ à $A(1,1)$
- suivant la droite OA.
- suivant Ox de $x = 0$ à $x = 1$ puis suivant Oy de $y = 0$ à $y = 1$.
- suivant Oy de $y = 0$ à $y = 1$ puis suivant Ox de $x = 0$ à $x = 1$.

W dépend du chemin suivi.

2 Énergie potentielle

2.1 Force conservative...

Une force est *conservative* (ou encore dérive d'une énergie potentielle) s'il existe une fonction $E_p(x,y,z,(t))$ appelée *énergie potentielle* telle que $\delta W = -dE_p$.

L'énergie potentielle est définie à une constante près.

Le travail ne dépend plus du chemin suivi :

$$W = \int \delta W = -\int dE_p = E_{p_1} - E_{p_2} = -\Delta E_p$$

en particulier $\oint \delta W = 0$.

$\int \delta W = \int \mathbf{F}.d\mathbf{OM}$ est aussi appelée circulation de $\mathbf{F}$.

2.2 ...ou force dérivant d'une énergie potentielle

$$dE_p = -\delta W = -\mathbf{F}.d\mathbf{OM} = -(F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz)$$

$$E_p(x,y,z) \Rightarrow dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x}\,dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}\,dy + \frac{\partial E_p}{\partial z}\,dz$$

$$\begin{cases} F_x = -\dfrac{\partial E_p}{\partial x} \\ F_y = -\dfrac{\partial E_p}{\partial y} \\ F_z = -\dfrac{\partial E_p}{\partial z} \end{cases}$$

que l'on peut écrire de manière plus condensée $\mathbf{F} = -\mathbf{grad}(E_p)$.

Exemple : le poids est opposé au gradient de mgz.

Dans le plan Oxy, $\mathbf{F}$ dérive d'une énergie potentielle si $\dfrac{\partial F_x}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y}{\partial x}$.

Exemple : $\mathbf{F} = (y^2 - x^2)\mathbf{e_x} + 4xy\mathbf{e_y}$ ne dérive pas d'une énergie potentielle.

3 Énergie mécanique

3.1 Définition

$$dE_c = (\mathbf{F}^c + \mathbf{F}^{nc}).d\mathbf{OM}$$

$$dE_c = \delta W^c + \delta W^{nc} = -dE_p + \delta W^{nc}$$

$$d(E_c + E_p) = \delta W^{nc}$$

$E_c + E_p = E_m$ appelé *énergie mécanique*

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie mécanique est égale au travail des forces non conservatives :

$$\Delta E_m = W^{nc}$$

ou encore dans un référentiel galiléen, la dérivée de l'énergie mécanique par rapport au temps est égale à la puissance des forces non conservatives :

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}^{nc}$$

3.2 Conservation

Si la puissance dissipée par les forces non conservatives est nulle à tout instant alors $E_m = cte$ (équation appelée *intégrale première de l'énergie*).

Exemple du ressort : $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = cte$

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0$$

Exemple du pendule : $E_m = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + mg\,l(1-\cos\theta) = cte$

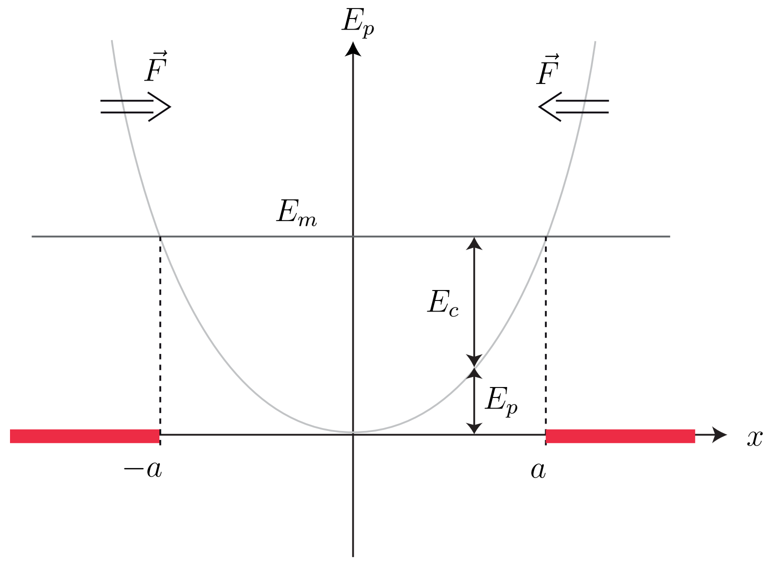
$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg\,l\sin\theta\dot{\theta} = 0$$

4 Problème à un degré de liberté

4.1 Positions d'équilibre

4.1.1 Équilibre stable - Exemple du ressort

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$



Comme $E_m = cte = E_c + E_p$ et $E_c \geq 0$, E_m est la plus grande valeur que puisse prendre E_p. Le mouvement est donc limité par $x = -a$ et $x = +a$.

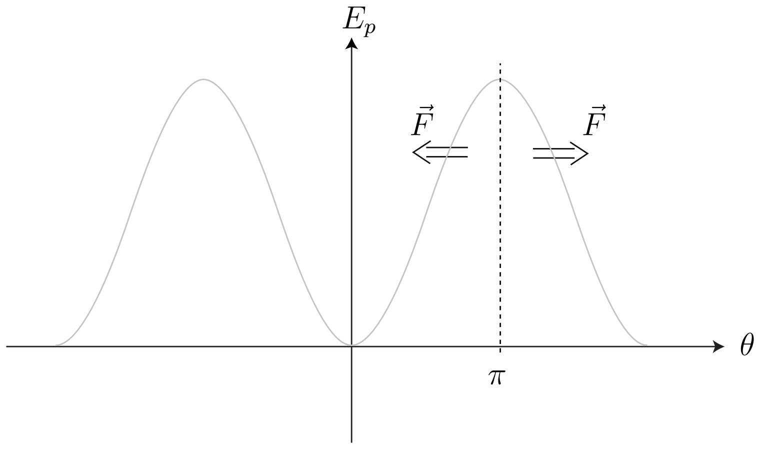
$$F_x = -\frac{dE_p}{dx} = -kx$$

Entre 0 et a, $F_x \leq 0$ ramène le système en $x = 0$.
Entre 0 et $-a$, $F_x \geq 0$ ramène aussi le système en $x = 0$.

$x = 0$, le minimum d'énergie potentielle, correspond à une position d'équilibre stable pour le ressort.

4.1.2 Équilibre instable - Exemple du pendule

$$E_p = mgl(1-\cos\theta)$$



Comme pour le ressort, $\theta = 0$, le minimum d'énergie potentielle, correspond à une position d'équilibre stable pour le pendule.

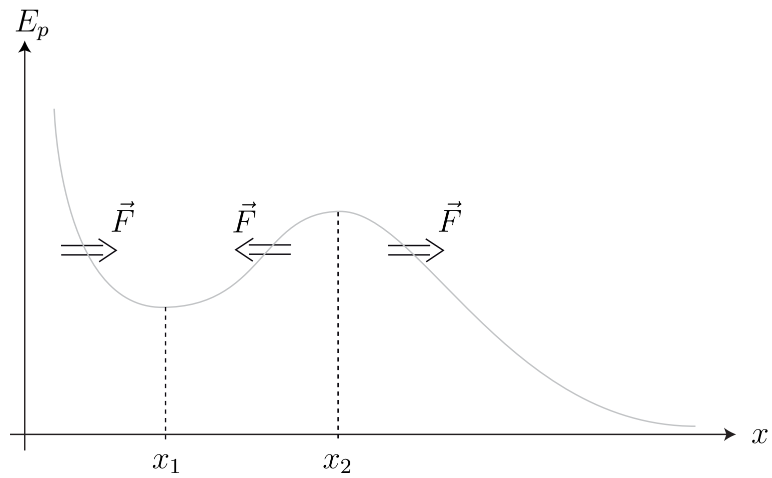
Regardons maintenant ce qui se passe autour du maximum d'énergie potentielle $\theta = \pi$:
$\delta W = F_r\, dr + F_\theta\, r d\theta = F_\theta\, l d\theta = -dE_p$

$$F_\theta = -\frac{1}{l}\frac{dE_p}{d\theta} = -mg\sin\theta$$

Entre 0 et π, $F_\theta \leq 0$ éloigne le système de $\theta = \pi$.
Entre π et 2π, $F_\theta \geq 0$ éloigne aussi le système de $\theta = \pi$.

$\theta = \pi$, le maximum d'énergie potentielle, correspond à une position d'équilibre instable pour le pendule.

4.1.3 Généralisation



Un minimum d'énergie potentielle x_1 correspond à une position d'**équilibre stable** :

$$\boxed{\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x_1} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_1} > 0}$$

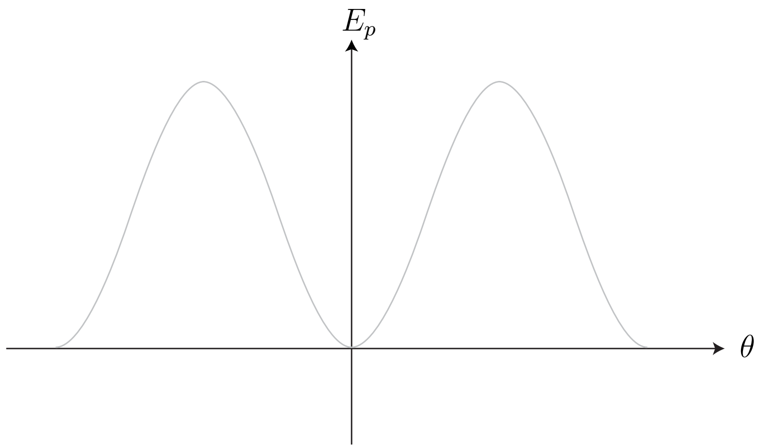
Un maximum d'énergie potentielle x_2 correspond à une position d'**équilibre instable** :

$$\boxed{\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x_2} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_2} < 0}$$

Si $E_m < E_p(x_1)$, le système peut s'échapper vers les $x > 0$, on a un **état de diffusion**.
Si $E_p(x_1) < E_m < E_p(x_2)$, le système est confiné entre x_a et x_b, on a un **état lié**.
Si $E_m > E_p(x_2)$, on a encore un état de diffusion.
(Faire 3 schémas différents)

4.2 Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable

4.2.1 Exemple du pendule



$$E_p = mgl(1-\cos\theta)$$

Au voisinage de $\theta = 0$, $\cos\theta \simeq 1 - \dfrac{\theta^2}{2}$

$$E_p \simeq mgl\frac{\theta^2}{2}$$

$$E_m = cte = \frac{1}{2}m(l\dot\theta)^2 + mgl\frac{\theta^2}{2} \Rightarrow 0 = ml^2\dot\theta\ddot\theta + mg\,l\theta\dot\theta$$

$$\ddot\theta + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Ce que l'on retrouve aussi en faisant $\sin\theta \simeq \theta$.

4.2.2 Généralisation

Une fonction $f(x)$ peut être développée autour de x_0 selon

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

(Développement en série de Taylor)
Exemple : $f(x) = \cos x$ autour de $x = 0$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + ...$$

Développons $E_p(x)$ autour d'une position d'équilibre $x = x_e$

$$\begin{aligned} E_p(x) &= E_p(x_e) + (x-x_e)\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x_e} + \frac{(x-x_e)^2}{2}\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_e} + ... \\ &= E_p(x_e) + 0 + \frac{1}{2}k(x-x_e)^2 + ... \end{aligned}$$

en posant $k = \left(\dfrac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_e}$
L'énergie mécanique se conservant :

$$E_m = cte = \frac{1}{2}m\dot x^2 + E_p(x_e) + \frac{1}{2}k(x-x_e)^2 \Rightarrow m\ddot x + k(x-x_e) = 0$$

ou encore en posant $X = x - x_e$

$$m\ddot X + kX = 0$$

Si $k > 0$, on retrouve l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique, le système oscille autour de la position d'équilibre qui est donc stable.
Si $k < 0$, $X = A\cosh(\omega t + \varphi)$, le système s'éloigne de la position d'équilibre qui est donc instable.

4.3 Portrait de phase

4.3.1 Déterminisme mécanique - État d'un système

Pour un problème à un degré de liberté x, la 2^{e} loi de Newton donne :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right)$$

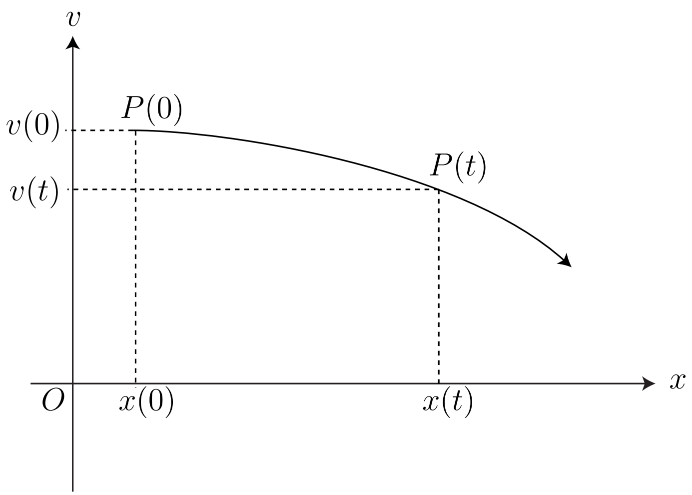
équation différentielle du 2e ordre équivalent à :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v \\ m\dfrac{dv}{dt} = F(x,v,t) \end{cases}$$

système de deux équations différentielles d'ordre un.
Ce système admet une solution unique si $x(0)$ et $v(0)$ sont donnés.

> Les systèmes mécaniques ont une évolution unique pour des conditions initiales déterminées (principe du déterminisme mécanique).

L'**état d'un système** à un degré de liberté est représenté à tout instant, par un point $P(t)$ de coordonnées (x,v) dans un plan appelé **plan de phase**.



Quand le temps s'écoule, le point $P(t)$ décrit une courbe appelée **trajectoire de phase**. Toute trajectoire de phase débute en $P(0)$ de coordonnées $(x(0),v(0))$.
Le **portrait de phase** d'un système est l'ensemble des trajectoires de phase du système obtenues en considérant l'ensemble des conditions initiales réalisables.

4.3.2 Lecture et interprétation

(voir document)
Oscillateur

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}ka^2$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{v^2}{a^2\omega_0^2} = 1$$

c'est l'équation d'une ellipse.

Oscillateur amorti
L'énergie mécanique diminue.

Pendule
Suivant les conditions initiales, le mouvement peut-être :
- harmonique
- périodique mais non harmonique
- révolutif

Notons la sensibilité du pendule aux conditions initiales.
Retenons :

> Si la trajectoire est fermée, le mouvement est périodique ; si la trajectoire est en plus elliptique, le mouvement est sinusoïdal ; une bosse (vitesse maximale) sur la trajectoire de phase correspond à une position d'équilibre stable ; un creux (vitesse minimale) correspond à une position d'équilibre instable.